$g'(x)=\frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{2}{\pi}x+k \quad ; \ k\in\mathbb{R}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)=1$

$\Rightarrow 1=1+k \Rightarrow k=0$

d'où $g(x)=\frac{2}{\pi}x$

$\Rightarrow f(Cos\ x)=\frac{2}{\pi}x$

b) $f(Cos\ x)=\frac{2}{\pi}x$

$\Rightarrow f^{-1}(\frac{2}{\pi}x)=Cos\ x$

soit $t=\frac{2}{\pi}x$

$x=\frac{\pi}{2}t$

d'où $f^{-1}(t)=Cos\ (\frac{\pi}{2}t)$

conclusion :

$f^{-1}(x)=Cos\ (\frac{\pi}{2}x) \ ; \ \forall x\in[0,1]$

3. $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$h(x)=f(Cos\ x)+f(\sin x)$

a) comme était composée et somme de fonctions dérivables

h est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h(x)=f(Cos\ x)+f(Cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$=\frac{2}{\pi}x+\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)$

$h(x)=1$

$h'(x)=-\sin x\ f'(Cos\ x)+Cos\ x\ f'(\sin x)$

$h'(x)=\frac{2\sin x}{\pi\sqrt{1-Cos^2 x}}-\frac{2\sin x}{\pi\sqrt{1-\sin^2 x}}$

$h'(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}=0$

b) h continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h'(x)=0 \ ; \ \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

d'où h est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$h(0)=f(1)+f(0)=1$

d'où

$h(x)=1 \ ; \ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

4. $n\in\mathbb{N}^*$

$\varphi_n(x)=Cos(\frac{\pi}{2}x)-x^n$

$x\in[0,1]$

a) $\varphi_n'(x)=\frac{-\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)-n\,x^{n-1}$

$\varphi_n'(x)\le 0 \ ; \ \forall x\in[0,1]$

φ_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur

$\varphi_n([0,1])=[-1,1]$ *et comme* $0\in[-1,1]$

alors il existe un uniqueréel

$a_n\in[0,1]\ tq : \varphi_n(a_n)=0$

$\varphi_n(0).\varphi_n(1)<0\Rightarrow a_n\in\ ]0,1[$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn